

27-AMALIY MASHG'ULOT

Ish vaqti va bosqichlari	O'qituvchi faoliyatining mazmuni	Talabalar faoliyatining mazmuni
I-Bosqich O'quv mashg'ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. Mashg'ulot mavzusi bo'yicha tushuncha berish. 1.2. Mavzuning avvalgi o'tilgan mavzu bilan aloqadorligi bo'yicha tushuncha berish	Tinglaydilar, yozadilar
II-Bosqich Asosiy (65 daqiqa)	2.1. Amaliy mashg'ulot mavzusiga oid nazariy ma'lumot berish. 2.2. Mavzuga oid amaliy topshiriqlar bajarish.	Tinglaydilar, yozadilar, savollar beradi, bajaradilar.
III-Bosqich Yakunlovchi (5 daqiqa)	3.1. Amaliy mashg'ulotni yakunlash 3.2. Talabalarga mustaqil bajarish uchun topshiriqlar berish.	Tinglaydilar, yozadilar, savollar beradi, bajaradilar.

27-MAVZU: O'ZGARUVCHILARNI BO'LAKLAB INTEGRALLASH

1. Aniq integralning ta'rifi

Ta'rif. Agar $\{x_{k-1}; x_k\} (k = \overline{1, n})$ kesmalar ichidagi eng katta uzunlikka ega bo'lgan kesmaning uzunligi nolga intilganda, S_n integral yig'indining chekli limiti mavjud bo'lib, u limit $[a, b]$ kesmaning bo'laklarga bo'linish usuliga va ξ_k nuqtalarning tanlanilishiga bog'liq bo'lmasa, u xolda u limit $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesma bo'yicha aniq integrali deb ataladi va $\int_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi, ya'ni ta'rifga ko'ra,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

Bu yerda: $[a; b]$ – integrallash kesmasi, a va b lar mos ravishda aniq integralning quyi va yuqori chegaralari, x esa integrallash o'zgaruvchisidir.

2. Aniq integralning xossalari

Endi $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalarni qaralayotgan $[a; b]$ kesmada integrallanuvchi funksiyalar deb faraz qilib, aniq integralning asosiy xossalarini sanab o'tamiz:

$$1. \int_a^b C f(x) dx = C \int_a^b f(x) dx \quad (C = \text{const}), \text{ ya'ni o'zgarmas ko'paytuvchini aniq integral}$$

belgisidan tashqariga chiqarib yoziladi.

2. $\int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b \varphi(x) dx$, ya'ni ikkita funksiya algebraik yig'indisining aniq integrali, qo'shiluvchilar integralining algebraik yig'indisiga teng.

1. $\int_a^a f(x) dx = 0$. Agar aniq integralning quyi va yuqori chegaralari o'zaro teng bo'lsalar, aniq integralning qiymati nolga teng.

2. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$, aniq integral chegaralarining o'rinlari almashtirilsa, uning qiymati teskari ishoraga o'zgaradi.

3. Agar $s, [a; b]$ dagi ixtiyoriy nuqta bo'lsa, u xolda quyidagi tenglik har doim o'rinlidir (aniq integralning additivlik xossasi):

$$4. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

5. Aniq integralning qiymati integrallash o'zgaruvchisining ko'rinishiga bog'liq emas: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy = \int_a^b f(t) dt = \dots = \int_a^b f(\alpha) d\alpha$

6. Agar $[a; b]$ kesmada $\varphi(x) \leq f(x)$ bo'lib, $a < b$ bo'lsa, u xolda har doim $\int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$ dir.

7. Agar $[a; b]$ kesmada $f(x) \geq 0$ bo'lib, $a < b$ bo'lsa, u xolda $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ dir.

8. Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ da uzluksiz bo'lib, $a < b$ bo'lsa, u xolda, $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$. Bu yerda, m va M lar $f(x)$ funksiyaning $[a; b]$ dagi mos ravishda eng kichik va eng katta qiymatlaridir.

9. Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u xolda shu kesmada hech bo'lmaganda shunday bitta c nuqta mavjudki ($a \leq c \leq b$), har doim quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$10. \int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a) \text{ (o'rta qiymat haqidagi teorema).}$$

3. Yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan integral va Nyuton-Leybnis formulasi.

Agar $F(x)$ funksiya $[a; b]$ da $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u xolda aniq integral, Nyuton-Leybnis formulasi deb ataladigan quyidagi formula orqali hisoblanadi.:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Endi aniq integralning xossalari xamda Nyuton-Leybnis formulasining qo'llanishiga doir ayrim misollarning yechilishini keltiramiz.

1-Misol. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2} (\cos \pi - \cos 0) = -\frac{1}{2} (-1 - 1) = 1.$

4. Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish.

1. Ko'pincha $\int_a^b f(x)dx$ ning hisoblanish jarayonini soddalashtirish maqsadida $x = \varphi(t)$ kabi almashtirish qo'llanadi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Bu yerda : 1) $f(x)$ funksiya $[a;b]$ da uzluksiz; 2) $\varphi(t)$ funksiya va uning $\varphi'(t)$ xosilasi $[\alpha, \beta]$ da uzluksiz; 3) $a = \varphi(\alpha)$ va $b = \varphi(\beta)$ tengliklar o'rinli;

4) $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha; \beta]$ da monotondir, ya'ni, $\varphi(t)$ funksiyaning barcha qiymatlari $[a;b]$ da joylashgan bo'lishi kerak.

Eslatma. Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirib integrallash chegaralari o'zgartirilgandan so'ng uni hisoblashda eski o'zgaruvchiga qaytishning xojati yo'q.

2-Misol. $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}$ ni hisoblashda xq^2 almashtirish kiritamiz. Yangi integrallash chegaralarini aniqlaymiz: $xq1$ da $zq1$ va $xq4$ da $zq2$;

U xolda:

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}} &= 2 \int_1^2 \frac{z^2 dz}{1+z} = 2 \int_1^2 \frac{z^2 - 1 + 1}{1+z} dx = 2 \int_1^2 (z-1) dz + 2 \int_1^2 \frac{dz}{1+z} = (z-1)^2 \Big|_1^2 + 2 \ln |1+z| \Big|_1^2 = \\ &= 1 + 2(\ln 3 - \ln 2) = 1 + \ln \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

5. Aniq integralni bo'laklab integrallash

Aytaylik, $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $[a;b]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsin.

Ushbu $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$ formulani bo'laklab integrallash formulasi deb yuritiladi va uning qo'llanilishi aniqmas integraldagi mos formulaga o'xshashdir.

$$\begin{aligned} \text{3-Misol. } \int_0^1 \arccos x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \arccos x \\ du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} dv = dx \\ v = x \end{array} \right| = x \arccos x \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= 1 \cdot \arccos 1 - 0 \cdot \arccos 0 - \sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 = 1. \end{aligned}$$

Misollar va masalalar

Quyidagi integrallarni hisoblang:

$$3. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 4}}.$$

$$8. \int \arcsin x dx$$

$$4. \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx.$$

$$9. \int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx.$$

$$5. \int \frac{dx}{(x+1) \sqrt{1-x-x^2}}$$

$$10. \int x^2 \sin x dx.$$

$$6. \int x \cdot \arctg x dx$$

$$11. \int \sin \ln x dx$$

$$7. \int \frac{x dx}{\sin^2 x}.$$

$$12. \int \sqrt{4+x^2} dx.$$